# Is there a planet B?

Daten zu allen derzeit bekannten Exoplaneten findet man im NASA Exoplanet Archive. Mit der Option ‘Select Columns’ lassen sich die Daten vor dem Export selektieren.

## Fragestellungen zu den Exoplaneten in Tabelle A:

A1 **Große Halbachse und Umlaufzeit:** Nach dem 2. Keplerschen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten so wie die Kuben ihrer großen Halbachsen. Während Kepler dieses Gesetz empirisch fand, konnte Newton es aus seinen Axiomen der klassischen Mechanik und seinem Gravitationsgesetz herleiten und so einen Zusammenhang zur Masse des Sterns und des Planeten herstellen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3$$

Hierin ist $T$ die Umlaufzeit, $M$ die Sternmasse, $m$ die Masse des Planeten und $a$ die große Halbachse seiner Umlaufbahn. Die Planetenmasse kann gegenüber der Sternmasse vernachlässigt werden, d.h. wir können $M + m \approx M$ annehmen. Betrachten wir die obige Gleichung einmal für die Erde und einmal für einen Exoplaneten, dann erhalten wir durch Division der beiden Gleichungen und unter Vernachlässigung der Exoplaneten- bzw. Erdmasse die Beziehung

$$\frac{T^2}{T_E^2} = \frac{M_\odot}{M}\frac{a^3}{a_E^3}. \tag{1}$$

Ist die Umlaufzeit oder die große Bahnhalbachse eines Exoplaneten bekannt, lässt sich (bei bekannter Sternmasse) damit die jeweils andere Größe ermitteln (die große Halbachse der Erdbahn entspricht in etwa 1 AE (eine **A**stronomische **E**inheit).
Berechnen Sie mithilfe der Beziehung (1) und den entsprechenden Daten aus Tabelle A die Halbachsen der gelisteten Exoplaneten!

A2 **Leuchtkraft:** Die Leuchtkraft eines Sterns ist die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie. Sie hängt im Wesentlichen nur von der Temperatur und der Größe des Sterns ab. Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Strahlungsleistung $P$ eines (schwarzen) Körpers der Temperatur $T$ durch $P = \sigma A T^4$ gegeben, wobei $A$ die Oberfläche des Körpers ist und $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante. Die Oberfläche eines Sterns hängt quadratisch von seinem Radius ab ($A = 4\pi R^2$), also verhält sich die Leuchtkraft eines Sterns mit Radius $R$ und Temperatur $T$ zu jener der Sonne (5778 K) wie folgt:

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{T^4 R^2}{T_\odot^4 R_\odot^2}$$

Ermitteln Sie mit dieser Beziehung die Leuchtkraft der zu den angeführten Planeten gehörigen Sterne in Vielfachen der Sonnenleuchtkraft!

A3 **Spektraltyp und Position auf der Hauptreihe:** Die Oberflächentemperatur eines Sterns und seine Leuchtkraft bzw. absolute Helligkeit legen seine Position im Hertzsprung-Russell-Diagramm fest. Versuchen Sie näherungsweise, die jeweiligen Sterne im beigelegten Hertzsprung-Russell-Diagramm einzuzeichnen!

A4 **Dichte:** Die Dichte $\rho$ eines Planeten lässt sich aus seiner Masse $M$ und seinem Volumen $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ (wenn wir Kugelform annehmen und $R$ der Radius des Planeten ist) einfach durch

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

berechnen. Führen Sie diese Berechnung durch!
*Um Ihre Ergebnisse einordnen zu können:* Die Erde hat eine Dichte von $5.51\mathrm{g/cm}^3$ (andere Gesteinsplaneten haben ähnliche Dichten), Jupiter hat eine Dichte von $1.33\mathrm{g/cm}^3$ (andere Gasplaneten haben ähnliche Dichten). Die Dichte eines Exoplaneten lässt daher auch Rückschlüsse darauf zu, ob der Planet eine feste Oberfläche hat. Grob lässt sich dazu sagen: Liegt die Dichte unter $2\mathrm{g/cm}^3$, handelt es sich um einen Gasplaneten, liegt sie (deutlich) über $2\mathrm{g/cm}^3$, handelt es sich um einen Exoplaneten, der eine feste Oberfläche besitzt.

A5 **Gravitationsbeschleunigung:** Zwei Massen $M$ und $m$ im Abstand $r$ ziehen sich gegenseitig mit der Kraft $F = G\frac{Mm}{r^2}$ an, wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Die Gravitationsbeschleunigung auf der Oberfläche eines Planeten mit Masse $M$ und Radius $R$ ist damit

$$a_G = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2}.$$

Benutzen Sie diese Formel, um die Gravitationsbeschleunigungen der Exoplaneten zu errechnen!
Wie hängt die Gravitationsbeschleunigung vom Radius eines Planeten ab, wenn wir eine konstante Dichte des Planeten annehmen? Die Masse wächst mit der dritten Potenz des Radius, somit ist $a_G$ direkt proportional zum Radius eines Gesteinsplaneten.[1] Auf einem Exoplaneten mit dem $k$-fachen Radius der Erde und derselben Dichte betrüge die Gravitationsbeschleunigung also $a_G = kg$, wobei $g$ die Gravitationsbeschleunigung auf der Erde ist ($g \approx 9.81\mathrm{m/s}^2$).

A6 **Habitabilität:** Die habitable Zone um einen Stern ist in erster Linie durch seine Leuchtkraft bestimmt (zu weit weg vom Stern ist es zu kalt, zu nahe zu heiß). Fragen wir uns, in welchem Abstand sich ein Exoplanet von einem Stern der Leuchtkraft $L$ befinden müsste, damit dort Temperaturen herrschen, die mit jener auf der Erde vergleichbar sind, können wir in einer vereinfachten Betrachtung, die die Atmosphäre des Exoplaneten außer Acht lässt, diesen Abstand durch

$$r_{\mathrm{hab}} = \sqrt{L/L_\odot} \cdot 1\mathrm{AE}$$

bestimmen. (Warum?) Wie weit darf der Bahnradius von diesem Wert abweichen, damit auf dem Exoplaneten höheres Leben möglich ist? Bereits für unser Sonnensystem kommen verschiedene Studien zu verschiedenen Zahlen. Dem ungefähren Mittelwert der Ergebnisse dieser Studien entsprechend nehmen wir an, dass die habitable Zone in unserem Sonnensystem zwischen 0.95 AE und 1.05 AE liegt (d.h maximal 5% Abweichung vom Radius der Erdbahn). Wir definieren den Habitabilitätsparameter

$$h := \frac{r}{r_{\mathrm{hab}}},$$

[1] Es gilt $M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$ und damit $a_G = G\frac{4\pi\rho R}{3}$.

wobei $r$ der tatsächliche Bahnradius des Exoplaneten ist. Wir betrachten einen Exoplaneten als habitabel, falls

$$0.95 \leq h \leq 1.05.$$

Bestimmen Sie den Habilitätsparameter $h$ der exemplarisch betrachteten Exoplaneten!

A7 **Is there a planet B?** Welche der untersuchten Exoplaneten sind die aussichtsreichsten Kandidaten für lebensfreundliche Welten? Welche Exoplaneten scheiden eher aus und warum? Diskutieren Sie!

A8 **Scheinbare Helligkeit und Entfernung:** Die scheinbare Helligkeit gibt an, wie hell Sterne oder andere Objekte im Kosmos für eine*n Beobachter*in auf der Erde erscheinen. Ihre Skala ist den Sinneswahrnehmungen entsprechend logarithmisch (Weber-Fechner-Gesetz). Der Polarstern hat eine scheinbare Helligkeit von 2.0 mag (2 Magnituden), ein Stern mit einem um 5 Magnituden kleineren Wert hat eine um das 100fache größere absolute Helligkeit. Der hellste Stern am Nachthimmel, Sirius, hat eine scheinbare Helligkeit von $-1.45$ mag, der Vollmond $-12.73$ mag, die Sonne $-26.73$ mag. Ist $\Phi_\odot$ der pro Fläche auf der Erde ankommende Lichstrom der Sonne und $\Phi$ der eines Sterns, dann gilt für die scheinbaren Helligkeiten $m_\odot$ und $m$:

$$m = m_\odot - \frac{5\ln(\Phi/\Phi_\odot)}{\ln 100}$$

Der pro Fläche bei uns ankommende Lichtstrom eines Sterns ist direkt proportional zu seiner Leuchtkraft, aber indirekt proportional zum Quadrat seiner Entfernung $d$ (denn die ausgesandte Strahlung verteilt sich gleichmäßig auf eine Sphäre mit dem Radius $d$). Ausgedrückt durch die Leuchtkraft und die Distanz lautet die obige Beziehung daher

$$m = m_\odot - 5\,\frac{\ln(L/L_\odot) - 2\ln(d/d_\odot)}{\ln 100},$$

wobei $d_\odot = 1\,\mathrm{AE} \approx 4.84 \cdot 10^{-6}$pc (Parsec,[2] astronomische Längenmaße lassen sich z.B. mit dem Rechner http://webprojekte.grg21oe.at/fri/Astronomie/Entfernungen/index.html umrechnen). Die absolute Helligkeit $M$ eines Sterns ist als seine scheinbare Helligkeit in einer Distanz von 10pc (parsec) definiert.[3] An einem stark lichtverschmutzten Himmel, etwa dem über einer Großstadt, kann auch das an die Dunkelheit adaptierte Auge bestenfalls Objekte mit einer scheinbaren Helligkeit bis zu 4 mag erkennen, auf dem Land bzw. fernab von Lichtverschmutzung (z.B. https://sternenweg-grossmugl.at/) bis zu 6 mag. Mit der obigen Beziehung lässt sich bei bekannter Leuchtkraft und scheinbarer Helligkeit die Distanz des Sterns ermitteln. Umgekehrt lässt sich bekannter Leuchtkraft und Distanz die scheinbare Helligkeit eines Sterns berechnen. Tun Sie dies unter Verwendung des oben stehenden Zusammenhangs!

[2] Ein Parsec ist die Entfernung, aus welcher der mittlere Erdbahnradius (1 AE) unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint und entspricht etwa 3.26 Lichtjahren (das ist die Strecke, die Licht in 3.26 Jahren zurücklegt).

[3] Die absolute Helligkeit der Sonne ist $M_\odot = m_\odot - 5\,\frac{\ln(d_\odot/10\mathrm{pc})}{\ln 10} \approx 4.84\,\mathrm{mag}$.

## Fragestellungen zu den Exoplaneten in Tabelle B:

Siehe dazu https://www.jpl.nasa.gov/edu/teach/activity/exploring-exoplanets-with-kepler/

B1 **Sternmassen:** Aufgrund der Masse-Leuchtkraft-Beziehung für Hauptreihensterne gilt

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{M^{3.5}}{M_\odot^{3.5}}.$$

Bei bekannter Leuchtkraft können wir also auf die Masse schließen, bei bekannter Masse auf die Leuchtkraft. Welche Massen haben folglich die Heimatsterne der in Tabelle B aufgelisten Exoplaneten? Berechnen Sie!

B2 **Sternradien:** Aus der Masse eines Hauptreihensterns lässt sich der Radius durch die folgenden empirisch ermittelten Beziehungen ermitteln:

- Für Sterne mit $M \leq 1.66 M_\odot$ gilt

$$\frac{R}{R_\odot} = 1.06 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.945}.$$

- Für Sterne mit $M > 1.66 M_\odot$ gilt

$$\frac{R}{R_\odot} = 1.33 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.555}.$$

Bei bekannter Temperatur und Leuchtkraft lässt sich ebenfalls auf den Radius schließen (siehe Fragestellung A2). Die Sonne hat einen Radius von $6.96 \cdot 10^5$ km, der Erdradius beträgt 6378km. Bestimmen Sie die Radien der vier Exoplaneten!

B3 **Planetenradien:** Aus den Helligkeits-‘Dips’ des Muttersterns lässt sich bei bekanntem Sternradius der Radius des vorbeiziehenden Planeten ermitteln. Geben Sie unter Verwendung der Daten aus Tabelle B sowie dem sich auf selbigem Arbeitsblatt befindenden Diagramm die Radien der zu untersuchenden Exoplaneten an! Achten Sie auf korrekte Einheiten (die Sonne hat den 109fachen Erdradius)! Warum ist der Bahnradius des Planeten für diese Berechnung nicht nötig? Der unserer Sonne nächstgelegene Stern, Proxima Centauri, ist ungefähr 4.24 Lichtjahre von uns entfernt.

# Tabelle A

| P L A N E T | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Name | Umlaufzeit | Halbachse | Masse | Radius | Habitabilität | Dichte | Fallbeschleunigung |
| Einheit | Tage | AE | Erdmassen | Erdradien | AE | kg/dm^3 | m/s^2 |
| CoRoT-27 b | 3,58 | | 3304,0 | 11,1 | | | |
| HD 21749 c | 7,79 | | 3,7 | 0,9 | | | |
| HD 219134 b | 3,09 | | 4,7 | 1,6 | | | |
| K2-18 b | 33 | | 8,9 | 2,3 | | | |
| KELT-9 b | 1,48 | | 915,8 | 20,8 | | | |
| Kepler-22 b | 289,86 | | 35,9 | 2,3 | | | |
| Kepler-45 b | 2,46 | | 160,6 | 10,6 | | | |
| Kepler-62 b | 5,71 | | 9,5 | 1,3 | | | |
| PDS 70 b | 43500 | | 2544,0 | 14,3 | | | |
| TRAPPIST-1 g | 12 | | 1,3 | 1,1 | | | |
| WASP-12 b | 1,09 | | 465,9 | 21,3 | | | |
| XO-5 b | 4,19 | | 378,4 | 12,5 | | | |

| S T E R N | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Distanz | Scheinbare Helligkeit | Temperatur | Sternmasse | Sternradius | Leuchtkraft |
| Einheit | pc | mag | K | Sonnenmassen | Sonnenradien | Sonnenleuchtkraft |
| CoRoT-27 b | 1035 | | 5900 | 1,05 | 1,08 | |
| HD 21749 c | 16 | | 4640 | 0,73 | 0,69 | |
| HD 219134 b | 7 | | 4699 | 0,81 | 0,78 | |
| K2-18 b | 38 | | 3457 | 0,36 | 0,41 | |
| KELT-9 b | 206 | | 10170 | 2,52 | 2,36 | |
| Kepler-22 b | 190 | | 5518 | 0,97 | 0,98 | |
| Kepler-45 b | 333 | | 3820 | 0,59 | 0,55 | |
| Kepler-62 b | 368 | | 4925 | 0,69 | 0,64 | |
| PDS 70 b | 113 | | 3972 | 0,76 | 1,26 | |
| TRAPPIST-1 g | 12 | | 2559 | 0,08 | 0,12 | |
| WASP-12 b | 432 | | 6360 | 1,43 | 1,66 | |
| XO-5 b | 278 | | 5430 | 1,04 | 1,13 | |

Quelle für die verwendeten Daten: https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/cgi-bin/TblView/nph-tblView?app=ExoTbls&config=planets